

Mapas globalmente acoplados en el régimen turbulento: Convergencia no universal con el tamaño del exponente de Lyapunov

Diego Pazó, David Velasco y Juan M. López

Instituto de Física de Cantabria (IFCA), Universidad de Cantabria-CSIC, Avda. Los Castros s/n, 39005 Santander

Dentro de la teoría del caos son conocidas diversas leyes de escala. Éstas están bien fundadas para el caos de baja dimensión, pero se recurre a argumentos habitualmente heurísticos cuando tratamos con caos de muy alta dimensión (con un número de grados de libertad N muy grande). Qué cambios experimenta el caos en la convergencia al límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$) es una cuestión habitual en la frontera entre la mecánica estadística y la teoría del caos.

Los mapas caóticos acoplados son un ejemplo paradigmático de sistemas caóticos de alta dimensión. En esta comunicación nos centramos en el caso de acoplamiento global y débil. En esa situación el sistema se encuentra en un régimen caótico extensivo, también llamado “turbulento” [1]. Hace una década Takeuchi y otros [2] llegaron a la conclusión de que para los mapas globalmente acoplados, el exponente de Lyapunov $\lambda(N)$ converge al límite termodinámico λ_∞ de forma logarítmica con el tamaño N :

$$\lambda_\infty - \lambda(N) \simeq \frac{c}{\ln N} \quad (1)$$

Esta conclusión, véase también el cap. 11 de [3], aplica por igual a mapas con multiplicadores de signo exclusivamente positivo, como aquellos con ambos signos.

En esta contribución demostramos teóricamente que la ley de escala (1) no está bien fundamentada. Para el caso

con multiplicadores positivos encontramos teóricamente tres regímenes de convergencia del exponente de Lyapunov, en función del mapa usado y de la intensidad del acoplamiento:

$$\lambda_\infty - \lambda(N) \simeq \begin{cases} c/N \\ c/N^\alpha & \text{con } 0 < \alpha < 1 \\ \text{más lento} & (1/\ln^\delta N?) \end{cases} \quad (2)$$

Los detalles de la teoría y las simulaciones numéricas que respaldan la ec. (2) pueden encontrarse en [4]. En la misma referencia se explica el error en el razonamiento que lleva a la ec. (1).

-
- [1] K. Kaneko, *Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements*, Physica D **41**, 137 (1990).
 - [2] K. A. Takeuchi, H. Chaté, F. Ginelli, A. Politi y A. Torcini, *Extensive and subextensive chaos in globally coupled dynamical systems*, Phys. Rev. Lett. **107**, 124101 (2011).
 - [3] A. Pikovsky y A. Politi, *Lyapunov Exponents* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016).
 - [4] D. Velasco, J. M. López y D. Pazó, *Nonuniversal large-size asymptotics of the Lyapunov exponent in turbulent globally coupled maps*, Phys. Rev. E **104**, 034216 (2021).